第7講　よくある極限

7

［A］　次の極限を求めよ．ただし，必要であれば $x>0$ のとき $e^x>x$ が成り立つことを用いてよい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}$　(n は自然数)

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{\sqrt{x}}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2^x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log x$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}+\log x\right)$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to+0}x^{\sin x}$

［B］　次の極限を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第7講　よくある極限

7　次の極限を求めよ．ただし，必要であれば $x>0$ のとき $e^x>x$ が成り立つことを用いてよい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{e^x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0}x^{\frac{x}{2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第７講　よくある極限

7

［A］　次の極限を求めよ．ただし，必要であれば $x>0$ のとき $e^x>x$ が成り立つことを用いてよい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}$　（n は自然数）

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{\sqrt{x}}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2^x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log x$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}+\log x\right)$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to+0}x^{\sin x}$

［B］　次の極限を求めよ．

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}$$

【答】　［A］ (1) 0　(2) 0　(3) 0　(4) 0　(5) 0　(6) ∞　(7) 1

［B］　$\dfrac{1}{3}$

【解説】

［A］ (1)　$x>0$ のとき $e^x>x$ が成り立つことより，$x=\dfrac{t}{2}$ とおくと，$\dfrac{t}{2}>0$ のとき $e^{\frac{t}{2}}>\dfrac{t}{2}$ が成り立つ，この両辺を２乗することで $e^t>\dfrac{t^2}{4}$ を得る．よって $\dfrac{4}{t}>\dfrac{t}{e^t}$ となるが，

$\dfrac{t}{2}>0$ つまり $t>0$ のとき $\dfrac{t}{e^t}>0$ なので $\dfrac{4}{t}>\dfrac{t}{e^t}>0$

ここで $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{4}{t}=0$ より $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\mathbf{0}$

(2)　$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x}{n}}{e^{\frac{x}{n}}}\right)^n\cdot n^n=\mathbf{0}$$

(3)　$\log x=2t$ とおくと $x=e^{2t}$ であり，$x\to\infty$ のとき $t\to\infty$ なので

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{\sqrt{x}}=\lim_{t\to\infty}\frac{2t}{\sqrt{e^{2t}}}=\lim_{t\to\infty}2\cdot\frac{t}{e^t}=\mathbf{0}$$

(4)　$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\log 2)x}{e^{(\log 2)x}}\cdot\frac{1}{\log 2}=\mathbf{0}$$

(5)　$\log x=-t$ とおくと，$x=e^{-t}$ であり，$x\to+0$ のとき $t\to\infty$ なので

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log x=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{t}{e^t}\right)=\mathbf{0}$

(6)　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}+\log x\right)=\lim_{x\to+0}\frac{1+x\log x}{x}=\infty$

(7)　$\displaystyle\lim_{x\to+0}x^{\sin x}=\lim_{x\to+0}e^{\log x^{\sin x}}=\lim_{x\to+0}e^{\sin x\log x}=\lim_{x\to+0}e^{\frac{\sin x}{x}x\log x}=\mathbf{1}$

[B]　$x>0$ のとき $x-\dfrac{1}{6}x^3<\sin x<x-\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{120}x^5$ が成り立つので,

$x(1-\cos x)-\dfrac{1}{6}x^3<\sin x-x\cos x<x(1-\cos x)-\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{120}x^5$

ここで $1-\cos x=\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ より

$\dfrac{x\sin^2 x}{1+\cos x}-\dfrac{1}{6}x^3<\sin x-x\cos x<\dfrac{x\sin^2 x}{1+\cos x}-\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{120}x^5$

よって $\dfrac{1}{1+\cos x}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2-\dfrac{1}{6}<\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}<\dfrac{1}{1+\cos x}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{120}x^2$

ここで $\displaystyle\lim_{x\to+0}\left\{\frac{1}{1+\cos x}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2-\frac{1}{6}\right\}=\lim_{x\to+0}\left\{\frac{1}{1+\cos x}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2-\frac{1}{6}+\frac{1}{120}x^2\right\}=\frac{1}{3}$

より $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\frac{1}{3}$

$x<0$ のとき $x-\dfrac{1}{6}x^3>\sin x>x-\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{120}x^5$ が成り立つので，$x>0$ のときと同様に

$\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\frac{1}{3}$ を得る.

よって　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\mathbf{\frac{1}{3}}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第７講　よくある極限

7　次の極限を求めよ．ただし，必要であれば $x>0$ のとき $e^x>x$ が成り立つことを用いてよい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{e^x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0}x^{\frac{x}{2}}$

【答】 (1) 0　(2) 1

【解説】

(1) $x>0$ のとき $e^x>x$ が成り立つので，$\dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}}>\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{e^x}>0$ が成り立つ．ここで $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}=0$ より $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{e^x}=\mathbf{0}$

(2) (1)より $\displaystyle\lim_{u\to\infty}\frac{u}{e^{u^3}}=0$ である．$\log x=-3u^3$ とおくと，$x=e^{-3u^3}$ であり，$x\to+0$ のとき $u\to\infty$ なので，$\displaystyle\lim_{x\to+0}x^{\frac{x}{2}}=\lim_{u\to\infty}\left(e^{-3u^3}\right)^{\frac{e^{-3u^3}}{2}}=\lim_{u\to\infty}e^{-\frac{3}{2}\left(\frac{u}{e^{u^3}}\right)^3}=\mathbf{1}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。